

Volume de sous-variétés algébriques aléatoires

Thomas Letendre (Sorbonne Université)
en collaboration avec M. Ancona et M. Puchol

Nantes – 29 novembre 2019



Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n .
On choisit une sous-variété de codimension r de M “au hasard”.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, ...
ou un comportement presque sûr.

Préliminaire : vecteurs gaussiens

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N , Λ opérateur auto-adjoint défini-positif.

Définition

Une variable aléatoire $X \in V$ est dite gaussienne, centrée, de variance Λ , si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sqrt{\det(\Lambda)}} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \Lambda^{-1} x, x \rangle \right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(0, \Lambda)$.

Une gaussienne standard est $\mathcal{N}(0, \text{Id})$.

Dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_N)$, on a $X = \sum a_i e_i$, où les coefficients (a_i) sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Polynômes de Kostlan

Un polynôme de Kostlan de degré d est un polynôme aléatoire homogène

$$P = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n],$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des gaussiennes standards i.i.d. dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$:

- $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$ est la longueur de α ;
- $\alpha! = \alpha_0! \dots \alpha_n!$ et, si $|\alpha| = d$, $\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha!}$;
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}$.

Polynômes de Kostlan

Un polynôme de Kostlan est $P \sim \mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, pour le produit scalaire qui rend la base $\left\{ \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha \mid |\alpha| = d \right\}$ orthonormée :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\pi^{n+1} d!} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z) \overline{Q(z)} e^{-\|z\|^2} dz.$$

C'est le seul produit scalaire (à constante multiplicative près) tel que :

- les monômes sont orthogonaux ;
- pour tout $O \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, $\langle P \circ O, Q \circ O \rangle = \langle P, Q \rangle$.

Zéros de polynômes de Kostlan

Soient $d \geq 1$, $n \geq 1$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

$$Z_d = P_1^{-1}(0) \cap \dots \cap P_r^{-1}(0) \subset \mathbb{S}^n,$$

où $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes de Kostlan i.i.d. dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$.

Zéros de polynômes de Kostlan

Soient $d \geq 1$, $n \geq 1$ et $r \in \{1, \dots, n\}$.

$$Z_d = P_1^{-1}(0) \cap \dots \cap P_r^{-1}(0) \subset \mathbb{S}^n,$$

où $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes de Kostlan i.i.d. dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$.

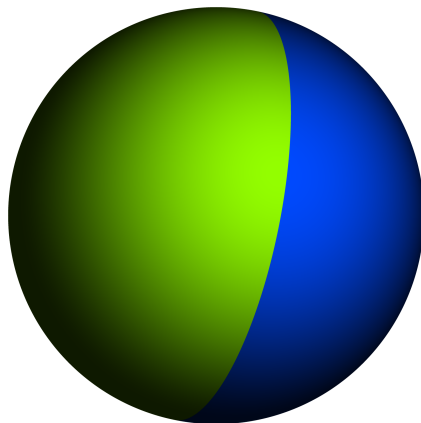
Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse, compacte sans bord et de codimension r dans $\mathbb{S}^n$ (éventuellement vide).

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout $d \geq 1$, on a : $\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})$.

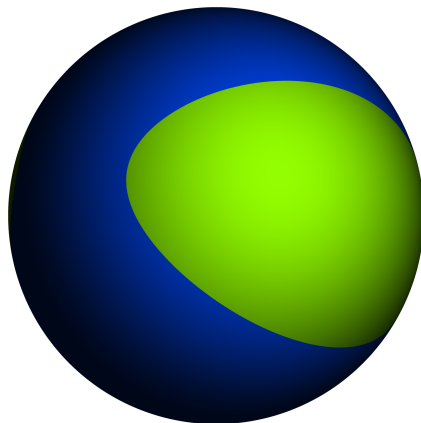
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 1$$

Images par Vincent Beffara.

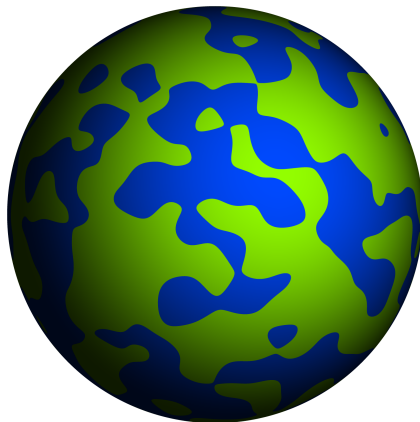
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 2$$

Images par Vincent Beffara.

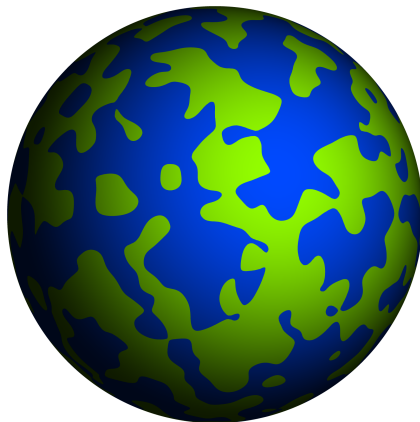
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 100$$

Images par Vincent Beffara.

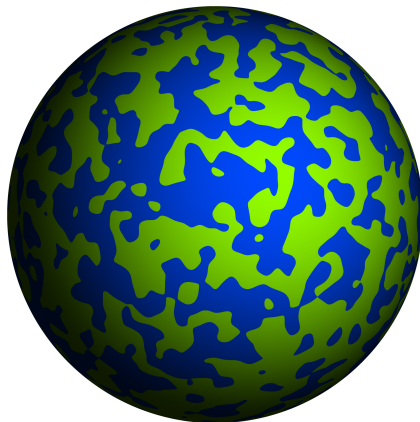
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 200$$

Images par Vincent Beffara.

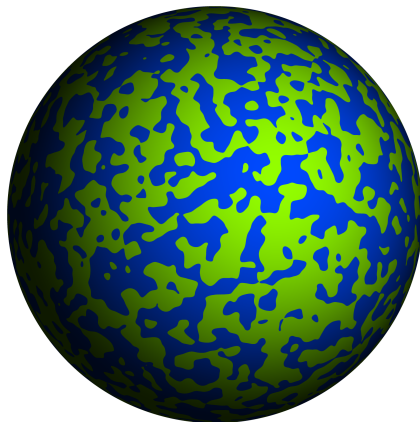
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 500$$

Images par Vincent Beffara.

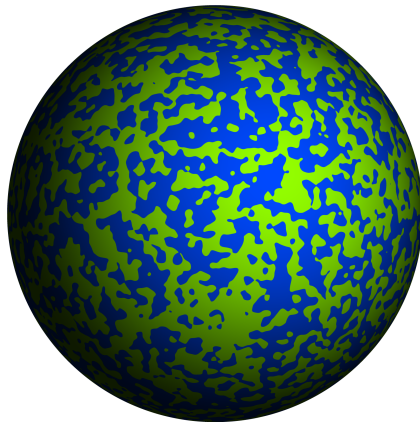
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 1000$$

Images par Vincent Beffara.

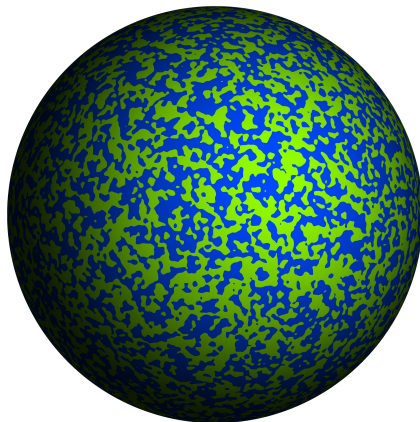
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = 2000$

Images par Vincent Beffara.

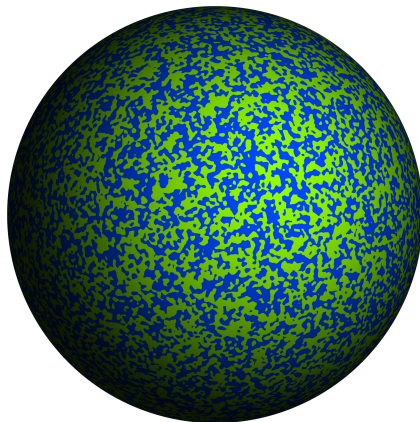
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 5000$$

Images par Vincent Beffara.

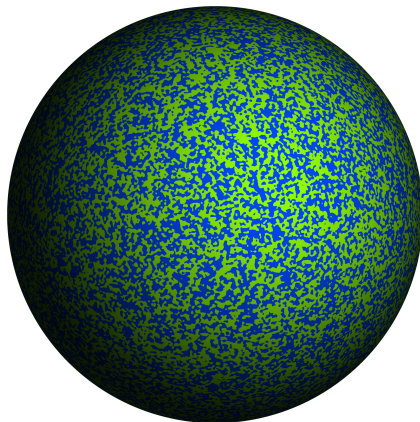
Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$$d = 10000$$

Images par Vincent Beffara.

Courbe algébrique aléatoire dans $\mathbb{S}^2$ ($n = 2$, $r = 1$)



$d = 20000$

Images par Vincent Beffara.

Cadre géométrique général

M variété projective réelle de dimension n .

$\mathcal{E} \rightarrow M$ fibré vectoriel de rang r et $\mathcal{L} \rightarrow M$ fibré en droites ample.

$s_d \sim \mathcal{N}(0, \text{Id})$ dans un bon espace de sections de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d \rightarrow M$.

$Z_d = s_d^{-1}(0)$ est presque sûrement une sous-variété de degré d , lisse, compacte, sans bord, et de codimension r dans M .

Statistiques linéaires

La métrique euclidienne sur $\mathbb{S}^n$ (resp. riemannienne sur M) induit des mesures de volume sur $\mathbb{S}^n$ (resp. M) et toutes ses sous-variétés.

Z_d définit une mesure de Radon aléatoire par :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(M), \quad \langle Z_d, \phi \rangle = \int_{x \in Z_d} \phi(x) |dV_{Z_d}|.$$

Pour $\phi = \mathbf{1}$, on a $\langle Z_d, \mathbf{1} \rangle = \text{Vol}(Z_d)$.

Cas de codimension maximale ($r = n$)

Z_d est fini presque sûrement. La mesure associée est $\sum_{x \in Z_d} \delta_x$, c'est-à-dire :

$$\langle Z_d, \phi \rangle = \sum_{x \in Z_d} \phi(x).$$

Moments, loi des grands nombres et théorème central limite

Espérance

Z_d de degré d et codimension r dans M de dimension n .

Théorème (L., 2016)

Soit $A_{n,r} = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)}$. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, on a :

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} A_{n,r} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) + \|\phi\|_{\infty} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Espérance

Z_d de degré d et codimension r dans M de dimension n .

Théorème (L., 2016)

Soit $A_{n,r} = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)}$. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, on a :

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} A_{n,r} \left(\int_M \phi |dV_M| \right) + \|\phi\|_{\infty} O\left(d^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Corollaire (Équidistribution en moyenne)

En tant que formes linéaire continues sur $(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_{\infty})$,

$$d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} A_{n,r} |dV_M|.$$

Variance

X variable aléatoire L^2 dans $\mathbb{R}$, on note $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

Théorème (L.-Puchol, 2017)

Il existe $\sigma_{n,r} > 0$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \sigma_{n,r}^2 \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right) + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right).$$

Variance

X variable aléatoire L^2 dans $\mathbb{R}$, on note $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

Théorème (L.–Puchol, 2017)

Il existe $\sigma_{n,r} > 0$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \sigma_{n,r}^2 \left(\int_M \phi^2 |dV_M| \right) + o\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right).$$

- Pour le nombre de racines de n polynômes de Kostlan dans $\mathbb{S}^n$ ($n = r$ et $\phi = 1$) prouvé par Armentano–Azaïs–Dalmao–Leòn (2015 et 2017).
- $\sigma_{n,r}$ est explicite et ne dépend que de n et r .
- La positivité de $\sigma_{n,r}$ est non triviale.

Moments centrés

X variable aléatoire L^p ($p \geq 2$) dans $\mathbb{R}$, on note $m_p(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$.

Théorème (Ancona–L., 2019)

Dans le cas $n = r = 1$, pour tout $p \geq 3$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p(\langle Z_d, \phi \rangle) = \mu_p \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}),$$

où μ_p est le p -ième moment d'une gaussienne standard dans $\mathbb{R}$.

Moments centrés

X variable aléatoire L^p ($p \geq 2$) dans $\mathbb{R}$, on note $m_p(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$.

Théorème (Ancona–L., 2019)

Dans le cas $n = r = 1$, pour tout $p \geq 3$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p(\langle Z_d, \phi \rangle) = \mu_p \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}),$$

où μ_p est le p -ième moment d'une gaussienne standard dans $\mathbb{R}$.

Conjecture

Pour n et r quelconques, même formule en remplaçant $\frac{p}{4}$ par $\frac{p}{2}(r - \frac{n}{2})$.

Loi forte des grands nombres

$(Z_d)_{d \geq 1}$ suite de sous-variétés algébriques aléatoires de codimension r dans M de dimension n telle que :

- les termes sont globalement indépendants,
- Z_d est de degré d et distribuée comme précédemment.

Théorème (L.–Puchol, 2017 ; Ancona–L., 2019)

Si $n = 1$ ou $n \geq 3$ alors, presque sûrement, pour tout $\phi \in C^0(M)$ on a :

$$d^{-\frac{r}{2}} \langle Z_d, \phi \rangle \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} A_{n,r} \int_M \phi |dV_M|.$$

C'est-à-dire, presque sûrement $d^{-\frac{r}{2}} Z_d \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{faible-}^} A_{n,r} |dV_M|$.*

Théorème central limite

Théorème (Ancona–L., 2019)

Si $n = r = 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, on a :

$$\frac{1}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}} \left(\langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right) \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{loi} \mathcal{N} \left(0, \|\phi\|_2^2 \right).$$

- On conjecture un résultat similaire pour tout (n, r) .
- Prouvé par Armentano–Azaïs–Dalmao–Leòn pour le volume des zéros de polynômes de Kostlan dans $\mathbb{S}^n$.

Autres corollaires

Corollaire (Concentration en probabilité)

Soient $\varepsilon > 0$ et $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$. Lorsque $d \rightarrow +\infty$, on a :

$$\mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| > \varepsilon\right) = \begin{cases} O(d^{-\frac{n}{2}}) \\ O(d^{-\frac{p}{2}}) \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \text{ si } n = r = 1.$$

Autres corollaires

Corollaire (Concentration en probabilité)

Soient $\varepsilon > 0$ et $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$. Lorsque $d \rightarrow +\infty$, on a :

$$\mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| > \varepsilon\right) = \begin{cases} O(d^{-\frac{n}{2}}) \\ O(d^{-\frac{p}{2}}) \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \text{ si } n = r = 1.$$

Corollaire (Hole probability)

Soit $U \subset M$ ouvert non vide. Lorsque $d \rightarrow +\infty$, on a :

$$\mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) = \begin{cases} O(d^{-\frac{n}{2}}) \\ O(d^{-\frac{p}{2}}) \end{cases} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \text{ si } n = r = 1.$$

Preuves des corollaires

Concentration en probabilité

On applique l'inégalité de Markov pour le moment d'ordre $2p$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}} |\langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]| > \varepsilon\right) &\leq \varepsilon^{-2p} m_{2p}\left(d^{-\frac{r}{2}} \langle Z_d, \phi \rangle\right) \\ &= O\left(d^{-pr} m_{2p}(\langle Z_d, \phi \rangle)\right).\end{aligned}$$

Pour n et r quelconques, on prend $p = 1$ et on utilise l'asymptotique de m_2 .

Pour $n = r = 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le dernier terme est $O(d^{-\frac{p}{2}})$.

Hole probability

Soit $U \subset M$ ouvert non vide. Il existe $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$ telle que :

- pour tout $x \in U$, $\phi_U(x) > 0$,
- pour tout $x \in M \setminus U$, $\phi_U(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < A_{n,r} \int_M \phi_U |dV_M|$.

Hole probability

Soit $U \subset M$ ouvert non vide. Il existe $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$ telle que :

- pour tout $x \in U$, $\phi_U(x) > 0$,
- pour tout $x \in M \setminus U$, $\phi_U(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < A_{n,r} \int_M \phi_U |dV_M|$.

Pour tout d assez grand, $d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle] > \varepsilon$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) &= \mathbb{P}(\langle Z_d, \phi_U \rangle = 0) \\ &\leq \mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}} |\langle Z_d, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle]| > \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Hole probability

Soit $U \subset M$ ouvert non vide. Il existe $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$ telle que :

- pour tout $x \in U$, $\phi_U(x) > 0$,
- pour tout $x \in M \setminus U$, $\phi_U(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < A_{n,r} \int_M \phi_U |dV_M|$.

Pour tout d assez grand, $d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle] > \varepsilon$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_d \cap U = \emptyset) &= \mathbb{P}(\langle Z_d, \phi_U \rangle = 0) \\ &\leq \mathbb{P}\left(d^{-\frac{r}{2}} |\langle Z_d, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi_U \rangle]| > \varepsilon\right). \end{aligned}$$

On utilise la concentration en probabilité pour $\langle Z_d, \phi_U \rangle$.

Loi forte des grands nombres

Soit $p \geq 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{d \geq 1} \left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \right)^{2p} \right] = \sum_{d \geq 1} d^{-pr} m_{2p}(\langle Z_d, \phi \rangle).$$

Pour $n \geq 3$, avec $p = 1$ on a $d^{-r} m_2(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{-\frac{n}{2}})$ sommable.

Pour $n = r = 1$, avec $p = 3$ on a $d^{-3} m_6(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{-\frac{3}{2}})$ sommable.

Loi forte des grands nombres

Soit $p \geq 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{d \geq 1} \left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \right)^{2p} \right] = \sum_{d \geq 1} d^{-pr} m_{2p}(\langle Z_d, \phi \rangle).$$

Pour $n \geq 3$, avec $p = 1$ on a $d^{-r} m_2(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{-\frac{n}{2}})$ sommable.

Pour $n = r = 1$, avec $p = 3$ on a $d^{-3} m_6(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{-\frac{3}{2}})$ sommable.

Dans les deux cas, $\sum_{d \geq 1} \left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \right)^{2p} < +\infty$ p.s., et :

$$d^{-\frac{r}{2}} \langle Z_d, \phi \rangle \sim d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} A_{n,r} \int_M \phi |dV_M|.$$

Loi forte des grands nombres

Soit $p \geq 1$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{d \geq 1} \left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \right)^{2p} \right] = \sum_{d \geq 1} d^{-pr} m_{2p}(\langle Z_d, \phi \rangle).$$

Pour $n \geq 3$, avec $p = 1$ on a $d^{-r} m_2(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{-\frac{n}{2}})$ sommable.

Pour $n = r = 1$, avec $p = 3$ on a $d^{-3} m_6(\langle Z_d, \phi \rangle) = O(d^{-\frac{3}{2}})$ sommable.

Dans les deux cas, $\sum_{d \geq 1} \left(d^{-\frac{r}{2}} \left| \langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \right| \right)^{2p} < +\infty$ p.s., et :

$$d^{-\frac{r}{2}} \langle Z_d, \phi \rangle \sim d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle] \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} A_{n,r} \int_M \phi |dV_M|.$$

On a conclut en utilisant la séparabilité de $(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème central limite ($n = r = 1$)

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, pour tout d , $X_d = \frac{\langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}}$ est centrée et :

$$\forall p \geq 2, \quad m_p(X_d) = \frac{m_p(\langle Z_d, \phi \rangle)}{\left(d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}\right)^p} \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \mu_p \|\phi\|_2^p.$$

Théorème central limite ($n = r = 1$)

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, pour tout d , $X_d = \frac{\langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}}$ est centrée et :

$$\forall p \geq 2, \quad m_p(X_d) = \frac{m_p(\langle Z_d, \phi \rangle)}{\left(d^{\frac{1}{4}} \sigma_{1,1}\right)^p} \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} \mu_p \|\phi\|_2^p.$$

$\mathcal{N}(0, \|\phi\|_2^2)$ est l'unique loi sur $\mathbb{R}$ dont la suite des moments est $(\mu_p \|\phi\|_2^p)$.

Par le théorème des moments $X_d \xrightarrow[d \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \|\phi\|_2^2\right)$.

Preuves des estimées de moments

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Sa fonction de corrélation est :

$$e_d(x, y) = \mathbb{E}[P(x)P(y)] = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = (\langle x, y \rangle)^d = \cos(\rho(x, y))^d,$$

où ρ est la distance géodésique sur $\mathbb{S}^n$.

Remarque

En prenant des dérivées partielles : $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) P(y) \right]$.

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Sa fonction de corrélation est :

$$e_d(x, y) = \mathbb{E}[P(x)P(y)] = \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = (\langle x, y \rangle)^d = \cos(\rho(x, y))^d,$$

où ρ est la distance géodésique sur $\mathbb{S}^n$.

Remarque

En prenant des dérivées partielles : $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) P(y) \right]$.

Dans le cas général, e_d est le noyau de Bergman de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$, et :

$$e_d \left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}} \right) \simeq e^{-\frac{1}{2}\|z\|^2}.$$

Formule de Kac–Rice (cas des hypersurfaces, $r = 1$)

Théorème

Pour tout d assez grand, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E} \left[\int_{Z_d} \phi \, |dV_{Z_d}| \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|\nabla_x s_d\| \mid s_d(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x, x)}} |dV_M|.$$

Formule de Kac–Rice (cas des hypersurfaces, $r = 1$)

Théorème

Pour tout d assez grand, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E} \left[\int_{Z_d} \phi |dV_{Z_d}| \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}[\|\nabla_x s_d\| | s_d(x) = 0]}{\sqrt{e_d(x, x)}} |dV_M|.$$

$(s_d(x), \nabla_x s_d)$ est gaussien centré, de covariance :

$$\begin{pmatrix} e_d(x, x) & \partial_{y_j} e_d(x, x) \\ \partial_{x_i} e_d(x, x) & \partial_{x_i} \partial_{y_j} e_d(x, x) \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}.$$

La densité ne dépend que de e_d et des ses premières dérivées en (x, x) .

Formule de Kac–Rice pour les moments

Pour tout $p \geq 2$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$m_p(\langle Z_d, \phi \rangle) = \int_{M^p} \left(\prod_{i=1}^p \phi(x_i) \right) \mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p) |dV_M|^p.$$

- $\mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p)$ ne dépend que des premières dérivées de e_d en (x_i, x_j) .
- $\mathcal{D}_d^p$ est singulière le long de $\Delta = \{(x_1, \dots, x_p) \in M^p \mid \exists i \neq j, x_i = x_j\}$.

Asymptotique de la variance

Estimées sur $\mathcal{D}_d^2$

- $|\mathcal{D}_d^2(x, y)| = O(d^{r-\frac{n}{2}-1})$ uniformément sur $\rho(x, y) \geq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.
- $\mathcal{D}_d^2(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}) \simeq d^r \mathcal{D}(\|z\|)$ sur $\|z\| \leq K \ln d$.

Asymptotique de la variance

Estimées sur $\mathcal{D}_d^2$

- $|\mathcal{D}_d^2(x, y)| = O(d^{r-\frac{n}{2}-1})$ uniformément sur $\rho(x, y) \geq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.
- $\mathcal{D}_d^2(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}) \simeq d^r \mathcal{D}(\|z\|)$ sur $\|z\| \leq K \ln d$.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) &\simeq \int_{\rho(x, y) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}} \phi(x) \phi(y) \mathcal{D}_d^2(x, y) \, dx \, dy \\ &\simeq d^{-\frac{n}{2}} \int_{x \in M} \int_{\|z\| \leq K \ln d} \phi(x) \phi\left(x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \mathcal{D}_d^2\left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \, dz \, dx \\ &\simeq d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi(x)^2 \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{D}(\|z\|) \, dz \right).\end{aligned}$$

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ et $d \geq 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \dots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ et $d \geq 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \dots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Les composantes connexes de $G_d(x)$ donnent une partition de $\{1, \dots, p\}$:
 $\mathcal{I}_d(x) = \{I_1, \dots, I_m\}$, i.e. $\bigsqcup_{i=1}^m I_i = \{1, \dots, p\}$.

Partition de M^p

Pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in M^p$ et $d \geq 1$, on définit un graphe $G_d(x)$:

- les sommets sont $\{1, \dots, p\}$,
- il y a une arête entre i et j si et seulement si $\rho(x_i, x_j) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Les composantes connexes de $G_d(x)$ donnent une partition de $\{1, \dots, p\}$:
 $\mathcal{I}_d(x) = \{I_1, \dots, I_m\}$, i.e. $\bigsqcup_{i=1}^m I_i = \{1, \dots, p\}$.

Si $\mathcal{I}$ partition de $\{1, \dots, p\}$, on définit : $M_{\mathcal{I},d}^p = \{x \in M^p \mid \mathcal{I}_d(x) = \mathcal{I}\}$.

$$M^p = \bigsqcup_{\mathcal{I} \text{ partition}} M_{\mathcal{I},d}^p \quad \text{et} \quad \text{Vol} \left(M_{\mathcal{I},d}^p \right) = O \left(\left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}} \right)^{n(p-m)} \right).$$

Contributions des $M_{\mathcal{I},d}^p$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_m\}$ avec m petit

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M_{\mathcal{I},d}^p$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}} (\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Contributions des $M_{\mathcal{I},d}^p$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_m\}$ avec m petit

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M_{\mathcal{I},d}^p$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}} (\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Partitions $\mathcal{I}$ contenant un singleton

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{4}-1})$ uniformément sur $M_{\mathcal{I},d}^p$. Contribue $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Contributions des $M_{\mathcal{I},d}^p$ (cas $n = r = 1$)

Partitions $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_m\}$ avec m petit

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{2}})$ uniformément. Si $m < \frac{p}{2}$, la partie $M_{\mathcal{I},d}^p$ contribue :

$$O\left(d^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right)^{p-m}\right) = O(d^{\frac{m}{2}} (\ln d)^p) = o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Partitions $\mathcal{I}$ contenant un singleton

On a $|\mathcal{D}_d^p(x)| = O(d^{\frac{p}{4}-1})$ uniformément sur $M_{\mathcal{I},d}^p$. Contribue $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Partitions en paires $\mathcal{I} = \{\{a_i, b_i\} \mid 1 \leq i \leq \frac{p}{2}\}$

Sur $M_{\mathcal{I},d}^p$, on a $\mathcal{D}_d^p(x_1, \dots, x_p) \simeq \prod_{i=1}^{\frac{p}{2}} \mathcal{D}_d^2(x_{a_i}, x_{b_i})$. Contribue :

$$\prod_{i=1}^{\frac{p}{2}} \int_{\rho(x_{a_i}, x_{b_i}) \leq K \frac{\ln d}{\sqrt{d}}} \phi(x_{a_i}) \phi(x_{b_i}) \mathcal{D}_d^2(x_{a_i}, x_{b_i}) dx_{a_i} dx_{b_i} \simeq \text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}}.$$

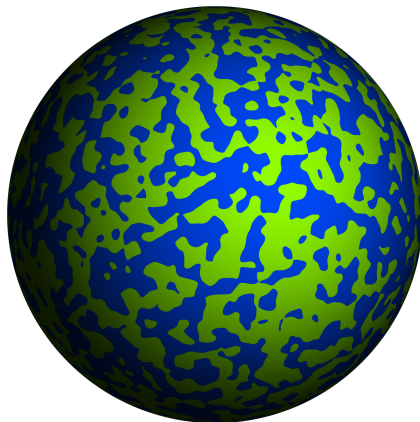
Conclusion de la preuve

- Chaque partition en paires contribue $\text{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}}$.
- Les autres partitions contribuent $o(d^{\frac{p}{4}})$.

Le nombre de partitions en paires de $\{1, \dots, p\}$ est :

$$\mu_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \\ \frac{p!}{2^{\frac{p}{2}} (\frac{p}{2})!} & \text{si } p \text{ est pair.} \end{cases}$$

Merci de votre attention



Courbe algébrique aléatoire de degré $d = 1000$ dans $\mathbb{S}^2$.

Image par Vincent Beffara.